

Przegląd i analityczne porównanie równań estymujących wartości współczynnika oporu liniowego

Review and analytical comparison of equations estimating the values of the Darcy friction factor

ROBERT MAŃKO

DOI 10.36119/15.2024.6.3

W artykule przedstawiono jawne formuły używane do obliczania współczynnika oporów liniowych oraz zbadanie ich dokładności i przydatności w różnych warunkach pracy przewodów, tj. przy różnych wartościach liczby Reynoldsa i chropowatości względnej. Otrzymane wyniki zostały porównane z wynikami otrzymywanymi z powszechnie rekomendowanego równania Colebrooka-White'a. Następnie za pomocą wskaźników w postaci błędów średniego, błędów względnego i maksymalnego błędów względnego została przeprowadzona analiza porównawcza. Równanie Colebrooka-White'a nie da się przekształcić do postaci jawnej, dlatego wymaga ono rozwiązania iteracyjnego. Zbieżność współczynnika oporów liniowych na poziomie mniejszym niż 0.1 % wymaga zwykle co najmniej 6 przybliżeń. Ostatecznie udało się stwierdzić, że wiele dostępnych przybliżeń równania Colebrooka-White'a jest bardzo dokładna. *Słowa kluczowe: Współczynnik oporów liniowych, Równanie Colebrooka-White'a, Liczba Reynoldsa, Chropowatość*

The article presents explicit formulas used to calculate the Darcy factor and examines their accuracy and applicability in various operating conditions, i.e., at different values of Reynolds number and roughness. The obtained results were compared with those obtained from the commonly recommended Colebrook-White equation. Subsequently, a comparative analysis was conducted using indicators such as mean error, relative error, and maximum relative error. The Colebrook-White equation cannot be transformed into explicit form, requiring an iterative solution. Convergence of the linear resistance coefficient at a level lower than 0.1% typically requires at least 6 approximations. Ultimately, it was found that many available approximations of the Colebrook-White equation are highly accurate.

Key words: Darcy friction factor, Colebrook-White equation, Reynolds number, roughness

Wykaz ważniejszych oznaczeń:

- λ – współczynnik oporów liniowych [-]
- τ – naprężenia styczne [Pa]
- f – opory przepływu [-]
- g – przyspieszenie ziemskie [m/s²]
- h – wysokość strat liniowych [m]
- k – współczynnik chropowatości bezwzględna [m]
- v – średnia prędkość wody w przekroju [m/s]
- D – średnica wewnętrzna rurociągu [m]
- Re – liczba Reynoldsa [-]

Wstęp

Przy obliczaniu strat ciśnienia w przewodach współczynnik oporów liniowych odgrywa ważną rolę, występuje on we wzorze na określenie liniowej straty ciśnienia

(energii) w przewodzie, jest ona potrzebna przy projektowaniu każdej instalacji.

Rurociągi charakteryzowane są przez długość, średnicę wewnętrzną i parametr odpowiadający za opory ruchu, a także przepływ w rurociągu pomiędzy węzłami w sieci [1]. O ile długość rurociągu pozostaje niezmienna w różnych fazach życia rurociągu, tak średnica wewnętrzna rurociągu czy jego chropowatość może zmieniać się w trakcie jego eksploatacji [2]. Parametry te można uznać informacjami niedokładnymi [3].

Zagadnienie oporów liniowych w ruchu laminarnym zostało teoretycznie rozwiązane przez Hagena i Poiseuille'a.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (1)$$

Na II Międzynarodowym kongresie Zaopatrywania w Wodę w 1952 r w Paryżu, wzór Colebrooka – White'a opracowany w 1939 roku oceniono jako najlepszy do obliczania współczynnika oporów liniowych przy ustalonym izotermicznym przepływie burzliwym wody w przewodach pod ciśnieniem [4] dla obszaru obejmującego strefę przejściową i strefę pełnej turbulencji.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (2)$$

Wzór Colebrooka-White'a jest wzorem empirycznym i chociaż daje najlepsze wyniki jest zbyt skomplikowany do stosowania go w praktyce, gdyż wartość współczynnika λ występuje tam w postaci

uwikłanej. Czasami istnieje konieczność uzyskania szybko i dokładnie wartości współczynnika λ , co jest szczególnie istotne dla intensywnych obliczeń naukowych oraz często w celu porównań [5].

Warto zwrócić uwagę, że dzięki dostępnym obecnie narzędziom obliczeniowym, stosowanie równania Colebrooka-White'a w praktyce nie stanowi problemu i nie wymaga korzystania z uproszczonych wzorów. Niemniej jednak, stosowanie równań uproszczonych (jawnych) może być preferowane w sytuacjach, gdzie szybkość obliczeń ma kluczowe znaczenie lub gdy dane wejściowe są ograniczone, co może być korzystne ze względów praktycznych oraz efektywności czasowej.

Najbardziej niezawodną procedurą w procesie ustalania współczynnika oporów liniowych dla konkretnego segmentu rury wykonanego z danego materiału jest metoda oparta na bezpośrednim wykorzystaniu równania Darcy-Weisbacha (3). W tym kontekście równanie to jest przekształcane do postaci określonej względem równania (4). Następnie straty ciśnienia, oznaczone jako 'h', są wyznaczane w warunkach laboratoryjnych w różnych warunkach przepływu.

$$h = \frac{l}{d} \lambda \frac{v^2}{2g} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{d}{l} h \frac{2g}{v^2} \quad (4)$$

Z perspektywy praktycznej, prezentowana metoda wydaje się pozbawiona stosowalności, głównie z powodu uwzględnienia jednego z parametrów równań, a mianowicie wysokości strat ciśnienia. W celu adekwatnej oceny oraz efektywnego wykorzystania tej metody, wymagane jest przeprowadzenie szczegółowych i kompleksowych badań laboratoryjnych w kontrolowanych warunkach. Otrzymane w ten sposób dane stanowią podstawę do przeprowadzenia zaawansowanych obliczeń projektowych, związanych z analizą i optymalizacją procesów, których skomplikowany charakter wyklucza możliwość przyjęcia jednoznacznych i intuicyjnych rozwiązań. Wartości uzyskane z eksperymentów laboratoryjnych posłużą jako punkt odniesienia do formułowania modeli matematycznych, które umożliwią bardziej szczegółową analizę i interpretację zjawisk związanych z wysokością strat ciśnienia. W efekcie, możliwe będzie osiągnięcie głębszego zrozumienia mechanizmów leżących u podstaw tego zjawiska, co z kolei pozwoli na opracowanie bardziej precyzyjnych i efektywnych strategii projektowych.

Alternatywnym wyrażeniem służącym do wyznaczenia współczynnika oporu, analogicznym do wcześniej przedstawionego wzoru (4), jest równanie Fanninga (5) [6]. Jego przekształcenia prowadzi do uzyskania formuły (6) [7].

$$f = \frac{\tau}{\rho \frac{v^2}{2}} \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{d}{l} h \frac{g}{2v^2} \quad (6)$$

Wzór Colebrooka-White'a, ze względu na swoją niejawność, determinuje konieczność wykorzystania numerycznych technik obliczeniowych. W przypadku bardzo dużych systemów, korzystanie z tej formuły staje się wyzwaniem, co z kolei motywuje poszukiwania szybszych i bardziej precyzyjnych metod określania wartości współczynnika oporu liniowego. Zapotrzebowanie na bardziej efektywne rozwiązania skłoniło do powstania licznych podejść zarówno niejawnych, jak i jawnych, mających na celu skuteczniejsze przekraczanie trudności związanych z analizą i modelowaniem złożonych systemów przepływu [8].

Przegląd wzorów na współczynnik oporów liniowych

Poniżej w kolejności chronologicznej podano wzory na obliczanie współczynnika oporów liniowych opracowanych po 1945 roku.

1. 1947 Moody [9]:

$$\lambda = 0.0055 \left[1 + \sqrt[3]{2 \cdot 10^4 \frac{k}{D} + \frac{10^6}{Re}} \right] \quad (7)$$

2. 1952 Altshul: [10]:

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} \quad (8)$$

3. 1966 Wood [11]:

$$\lambda = a + bRe^c \quad (9)$$

gdzie:

$$a = 0.094 \left(\frac{k}{D} \right)^{0.225} + 0.53 \left(\frac{k}{D} \right) \quad (10a)$$

$$b = 88 \left(\frac{k}{D} \right)^{0.44} \quad (10b)$$

$$c = -1.62 \left(\frac{k}{D} \right)^{0.134} \quad (10c)$$

4. 1973 Eck [12]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,71D} + \frac{15}{Re} \right) \quad (11)$$

5. 1973 Churchill-1 [13]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3,71D} + \left(\frac{7}{Re} \right)^{0,9} \right] \quad (12)$$

6. 1976 Jain [14]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3,715D} + \left(\frac{6,943}{Re} \right)^{0,9} \right] \quad (13)$$

7. 1976 Swamee i Jain [15]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3,7D} + \left(\frac{5,74}{Re} \right)^{0,9} \right] \quad (14)$$

8. 1977 Churchill-2 [16]:

$$\lambda = 8 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(a+b)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{12}} \quad (15)$$

gdzie:

$$a = \left[-2,457 \ln \left(\left(\frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{k}{D} \right) \right]^{16} \quad (15a)$$

$$b = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16} \quad (15b)$$

9. 1979 Chen N. [17]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3,7065D} - \frac{5,0542}{Re} \log \left(\frac{1}{2,8257} \left(\frac{k}{D} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}} \right) \right] \quad (16)$$

10. 1980 Round [18]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log \left[\frac{Re}{0,135 Re \left(\frac{k}{D} \right) + 6,5} \right] \quad (17)$$

11. 1980 Shacham: [10]:

$$\lambda = \left[-2 \log \left(\frac{k}{3,71D} - \frac{5,02}{Re} \left(\frac{k}{3,71D} + \frac{14,5}{Re} \right) \right) \right]^{-2} \quad (18)$$

12. 1981 Barr [19]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3,71D} + \frac{4,518 \log \frac{Re}{7}}{Re \left(1 + \frac{Re^{0,52}}{29} \left(\frac{k}{D} \right)^{0,7} \right)} \right] \quad (19)$$

13. 1981 Pavlov i inni: [10]:

$$\lambda = \left[-2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \left(\frac{6.81}{Re} \right)^{0.9} \right) \right]^{-2} \quad (20)$$

14. 1982 Zigrang i Sylvester [20]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} - \frac{5.02}{Re} \log \left(\frac{k}{3.7D} - \frac{5.02}{Re} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{13}{Re} \right) \right) \right] \quad (21)$$

15. 1983 Haaland [21]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{k}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right] \quad (22)$$

16. 1984 Serghides [22]:

$$\lambda = \left[a - \frac{(a-b)^2}{a-2b+c} \right]^{-2} \quad (23)$$

gdzie:

$$a = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{12}{Re} \right] \quad (23a)$$

$$b = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51a}{Re} \right] \quad (23b)$$

$$c = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51b}{Re} \right] \quad (23c)$$

17. 1989 Tsal [23]:

$$\lambda = \begin{cases} \text{Jeżeli } 0.11 \left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} \geq 0.18 \\ \text{to } \lambda = 0.11 \left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} \\ \text{Jeżeli } 0.11 \left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} < 0.18 \\ \text{to } \lambda = 0.0028 + \\ + 0.0935 \left(\frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} \end{cases} \quad (24)$$

18. 1997 Manadilli [24]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{95}{Re^{0.983}} - \frac{96.82}{Re} \right] \quad (25)$$

19. 2002 Romeo, Royo i Monzon [25]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3.7065D} + a \cdot b \right] \quad (26)$$

gdzie:

$$a = -\frac{5.0272}{Re} \quad (26a)$$

$$b = \log \left(\frac{k}{3.827D} - \frac{4.657}{Re} c \right) \quad (26b)$$

$$c = \log \left[\left(\frac{k}{7.7918D} \right)^{0.9924} + \left(\frac{5.3326}{208.815 + Re} \right)^{0.9345} \right] \quad (26c)$$

20. 2006 Sonnad i Goudar [26]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.8686 \ln \frac{0.4587 Re}{(\alpha - 0.31)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \quad (27)$$

gdzie:

$$\alpha = 0.124 \frac{k}{D} Re + \ln(0.4587 Re) \quad (27a)$$

21. 2007 Rao i Kumar [27, 28]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{1}{2 \frac{k}{d} \cdot \frac{0.444 + 0.135 Re}{Re} \cdot a} \right) \quad (28)$$

gdzie:

$$a = 1 - 0.55 e^{-0.33 \left(\ln \frac{Re}{6.5} \right)^2} \quad (28a)$$

22. 2007 Swamee i Swamee [29]:

$$\lambda = \left[\left(\frac{64}{Re} \right)^8 + 9.5 \left(\ln \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) - \left(\frac{2500}{Re} \right)^6 \right)^{-16} \right]^{0.125} \quad (29)$$

23. 2008 Buzzellii [30]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a - \frac{a + 2 \log \frac{b}{Re}}{1 + \frac{2.18}{b}} \quad (30)$$

gdzie:

$$a = \frac{0.744 \ln Re - 1.41}{1 + 1.32 \sqrt{\frac{k}{D}}} \quad (30a)$$

$$b = \frac{k}{3.7D} Re + 2.51a \quad (30b)$$

24. 2008 Vatankhah i Kouchakzadeh [31]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.8686 \ln \frac{0.4587 Re}{(\alpha - 0.31)^{\frac{\alpha}{\alpha+0.9633}}} \quad (31)$$

gdzie:

$$\alpha = 0.124 \frac{k}{D} Re + \ln(0.4587 Re) \quad (31a)$$

25. 2008 Cheng [32]:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{Re}{64} \right)^a \left(1.8 \log \frac{Re}{6.8} \right)^{2(1-a)b} \left(2.0 \log \frac{3.7D}{k} \right)^{2(1-a)(1-b)} \quad (32)$$

gdzie:

$$a = \frac{1}{1 + \left(\frac{Re}{2720} \right)^9} \quad (32a)$$

$$b = \frac{1}{1 + \left(\frac{Re k}{160D} \right)^2} \quad (32b)$$

26. 2009 Avcii i Kargoz [33]:

$$\lambda = \frac{6.4}{\left[\ln Re - \ln \left(1 + \frac{0.01 Re \frac{k}{D} \left(1 + 10 \sqrt{\frac{k}{D}} \right) \right)^{2.4} \right]} \quad (33)$$

27. 2010 Evangelides i inni [34]:

$$\lambda = \frac{0.2479 - 0.0000947(7 - \log Re)^4}{\left[\log \left(\frac{k}{3.615D} + \frac{7.366}{Re^{0.9142}} \right) \right]^2} \quad (34)$$

28. 2011 Brkić [35]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{2.18a}{Re} + \frac{k}{3.71D} \right] \quad (35)$$

gdzie:

$$a = \ln \frac{Re}{1.816 \ln \frac{1.1 Re}{\ln(1 + 1.1 Re)}} \quad (35a)$$

29. 2011 Fang [36]:

$$\lambda = 1.613 \left[\ln \left(0.234 \left(\frac{k}{D} \right)^{1.1007} - 1.613 \frac{60.525}{Re^{1.1105}} + \frac{56.291}{Re^{1.0712}} \right) \right]^{-2} \quad (36)$$

30. 2011 Ghanbari i inni [37]:

$$\lambda = \left[-1.52 \log \left(\left(\frac{2.731}{Re} \right)^{0.9152} + \left(\frac{k}{7.21D} \right)^{1.042} \right) \right]^{-2.169} \quad (37)$$

31. 2011 Li: [38]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{1.2563}{\operatorname{Re} \sqrt{\frac{-0.0015702}{\ln \operatorname{Re}} + \frac{0.39442031}{(\ln \operatorname{Re})^2} + \frac{2.5341533}{(\ln \operatorname{Re})^3} + \frac{k}{3.71D}}} \right) \quad (38)$$

32. 2012 Samadianfard [39]:

$$\lambda = a + b + c \quad (39)$$

gdzie:

$$a = \frac{\operatorname{Re} \frac{k}{D} - 0.6315093}{\operatorname{Re} \frac{1}{3} + \operatorname{Re} \frac{k}{D}} \quad (39a)$$

$$b = 0.0275308 \left(\frac{6.929841}{\operatorname{Re}} + \frac{k}{D} \right)^{\frac{1}{9}} \quad (39b)$$

$$c = \frac{10^{\frac{k}{D}}}{k/D + 4.781616} \left(\sqrt{\frac{k}{D} + \frac{9.99701}{\operatorname{Re}}} \right) \quad (39c)$$

33. 2014 Winning i Cole [40]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log \left[\frac{a_1}{a_2 + \operatorname{Re}} + \left(\frac{k}{3.73D} \right)^{1.109} \right] \quad (40)$$

Gdzie stałe a_1 i a_2 przyjmowane są z tabeli 1:

Tabela 1. Wartości współczynników do wzoru Winning'a i Cole'a
Table 1. Coefficient values for the Winning's and Cole's formula

Chropowatość względna (k/D)		a_1	a_2
min	max		
$1 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	7.2	380
$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	7.2	370
$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	7.35	480
$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	7.41	490
$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	7.5	520
$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	7.32	300
$4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	7.2	180
$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	7.1	160
$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	6.7	130
$6 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	6.1	100

34. 2015 Heydari i inni [41]:

$$\lambda = \begin{cases} \text{Jeżeli } \operatorname{Re} < \operatorname{Re}_{BL} \text{ to} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.74 - 0.44a_1 - 2.25b + \\ + 0.053a_1^2 + 0.0057b^2 + \\ + 0.046a_1b \\ \text{Jeżeli } \operatorname{Re} \geq \operatorname{Re}_{BL} \text{ to} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.7503 - 1.59a_2 - \\ - 0.306b + 0.41a_2^2 + \\ + 0.57b^2 - 0.98a_2b \end{cases} \quad (41)$$

gdzie:

$$\operatorname{Re}_{BL} = 10^{2.61 - 1.13 \log \frac{k}{D} - 0.0384 (\log \frac{k}{D})^2} \quad (41a)$$

$$a_1 = \log \operatorname{Re} \quad (41b)$$

$$a_2 = \log \frac{k}{D} \quad (41c)$$

$$b = \log \left(\frac{k}{4D} + \frac{6}{\operatorname{Re}^{0.9}} \right) \quad (41d)$$

35. 2015 Mikata i Walczak [42]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.8686 \ln \left[\frac{0.4587 \operatorname{Re}}{a - \ln(a - \ln a)} \right] \quad (42)$$

gdzie:

$$a = 0.124 \operatorname{Re} \frac{k}{D} + \ln(0.4587 \operatorname{Re}) \quad (42a)$$

36. 2016 Shaikh i Brkić [43]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{2.51}{a \cdot \operatorname{Re}} + \frac{k}{3.7D} \right] \quad (43)$$

gdzie:

$$a = \left(1.14 - 2 \log \frac{k}{D} \right)^{-1} \quad (43a)$$

37. 2016 Bilberg [44]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.8686 \left[\ln \frac{\operatorname{Re}}{2.18} + \ln a \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{6a^2} \ln a \left(3 + \frac{2}{a} \ln a - \frac{9}{x} \right) \right) \right] \quad (44)$$

gdzie:

$$a = \ln \frac{\operatorname{Re}}{2.18} + \frac{\operatorname{Re}}{8.0666} \cdot \frac{k}{D} \quad (44a)$$

38. 2016 Offor i Alabi [45]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3.71D} - \frac{1.975}{\operatorname{Re}} \ln \left(\left(\frac{k}{3.93D} \right)^{1.092} + \frac{7.627}{\operatorname{Re} + 395.9} \right) \right] \quad (45)$$

39. 2018 Brkić i Praks [46]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.8686 \left[b - c + \frac{1.0119c}{a+b} + \frac{c - 2.3849}{(a+b)^2} \right] \quad (46)$$

gdzie:

$$a = \frac{\operatorname{Re}}{8.0878D} \frac{k}{D} \quad (47a)$$

$$b = \ln(\operatorname{Re}) - 0.7794 \quad (47b)$$

$$c = \ln(a+b) \quad (47c)$$

40. 2018 Bellos i inni [47,48]:

$$\lambda = \left(\frac{64}{\operatorname{Re}} \right)^a \left(0.75 \ln \frac{\operatorname{Re}}{5.37} \right)^{2(a-1)b} \left(0.88 \ln \frac{3.41D}{k} \right)^{2(a-1)(1-b)} \quad (48)$$

gdzie:

$$a = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{Re}}{2712} \right)^{8.4}} \quad (48a)$$

$$b = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{Re}}{150 \frac{D}{k}} \right)^{1.8}} \quad (48b)$$

41. 2018 Vatankhah [49]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.8686 \ln \left[\frac{0.3984 \operatorname{Re}}{(0.8686a)^{\frac{a}{a+b}}} \right] \quad (49)$$

gdzie:

$$a = 0.12363 \operatorname{Re} \frac{k}{D} + \ln(0.3984 \operatorname{Re}) \quad (49a)$$

$$b = 1 + \left[\frac{1+a}{0.5 \ln(0.8686a)} - \frac{1+4a}{3(1+a)} \right]^{-1} \quad (49b)$$

42. 2019 Niazkar [50]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a - \frac{(a-b)^2}{(a-2b+c)} \quad (50)$$

gdzie:

$$a = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{4.5547}{\operatorname{Re}^{0.8784}} \right] \quad (50a)$$

$$b = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51a}{\operatorname{Re}} \right] \quad (50b)$$

$$c = -2 \log \left[\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51b}{\operatorname{Re}} \right] \quad (50c)$$

43. 2021 Mileikovskiy i Tkachenko [51]:

$$\lambda = \left(\frac{8.128943 + a}{8.128943b - 0.86859209a \cdot \ln \frac{a}{3.7099535 \operatorname{Re}}} \right)^2 \quad (51)$$

gdzie:

$$a = Re \frac{k}{D} + 9.3120665b \quad (51a)$$

$$b = -0.79638 \ln \left(\frac{k}{8.208D} + \frac{7.3357}{Re} \right) \quad (51b)$$

44. 2021 Zahreddine [52]:

$$\lambda = a_2^2 \left[\left(\sqrt{d_2^2 + d_1^3 - d_2} \right)^{1/3} - \left(\sqrt{d_2^2 + d_1^3 + d_2} \right)^{1/3} + \frac{a_1 + 3a_2b}{2} \right]^{-2} \quad (52)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{k}{3.7D} \quad (52a)$$

$$a_2 = \frac{2.51}{Re} \quad (52b)$$

$$a_3 = -\frac{2}{\ln 10} \quad (52c)$$

$$b = a_2 \left[-1.8 \log \left(a^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right] \quad (52d)$$

$$c_1 = \frac{a_2 a_3}{3(a_1 + b)^3} \quad (52e)$$

$$c_2 = -\frac{a_2 a_3}{2(a_1 + b)^2} - 3c_1 b \quad (52f)$$

$$c_3 = 3c_1 b^2 + \frac{a_2 a_3}{(a_1 + b)^2} b + \frac{a_2 a_3}{a_1 + b} - 1 \quad (52g)$$

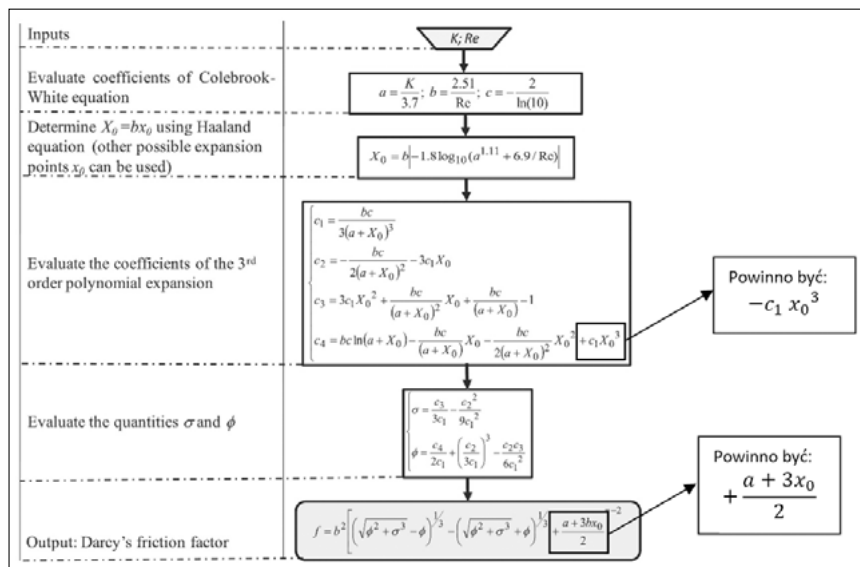
$$c_4 = a_2 a_3 \ln(a_1 + b) - \frac{a_2 a_3}{(a_1 + b)} b - \frac{a_2 a_3}{2(a_1 + b)^2} b^2 + c_1 b^3 \quad (52h)$$

$$d_1 = \frac{c_3}{3c_1} - \frac{c_2^2}{9c_1^2} \quad (52i)$$

$$d_2 = \frac{c_4}{2c_1} - \frac{c_2^3}{27c_1^3} - \frac{c_2 c_3}{6c_1^2} \quad (52j)$$

Budowa wzorów

W wielu przypadkach można zauważyć znaczne podobieństwo pomiędzy poszczególnymi wzorami, co głównie wynika z prób dokładniejszego dopasowania wyników, mając za bazę już opracowane jawne równania oraz z próby odzwierciedlenia równania Colebrooka-White'a. Równania te można pogrupować na 3



Rysunek 1. Algorytm obliczeń wg Zahreddina [52]
Figure 1. Zahreddin calculation algorithm [52]

podstawowe grupy, których ogólną postać przedstawiono poniżej:

I. Wzory o ogólnej strukturze w postaci:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = x_1 \log_{x_2} \left[\left(x_3 \frac{k}{D} \right)^{x_4} + \left(\frac{x_5}{Re} \right)^{x_6} \right]$$

Do tej grupy należą formuły: Moody, Altszul, Tsai.

II. Wzory o strukturze podobnej do grupy I:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = x_1 \log_{x_2}$$

$$\left[\left(x_3 \frac{k}{D} \right)^{x_4} + \left(\frac{x_5}{Re} \right)^{x_6} + f \left(\frac{k}{D}, Re \right) \right]$$

Do tej grupy należą modele: Eck, Churchill, Jain, Swamee i Jain, Pavlov i inni, Haaland, Brkic, Shaikh i Brkic.

III. Wzory o ogólnej strukturze w postaci:

$$\lambda = x_1 + x_2 \left(x_3 \frac{k}{D} + \frac{x_3}{Re} \right)^{x_1}$$

W tej grupie znajdują się wzory: Chen, Schaham, Barr, Zigrang i Sylvester, Manadilli, Romeo, i inni,

Duże podobieństwo obserwuje się między formułami (23) i (50). Model proponowany przez Niazkara [50] różni się od wzoru Serghidesa [22] wyłącznie wartościami w dwóch stałych w równaniach (23a i 50a).

Wzór proponowany przez Zahreddine przyciąga uwagę ze względu na jego zaawansowany stopień złożoności, znacznie odbiegający od konwencjonalnych formuł przedstawionych wcześniej. Ważnym aspektem jest fakt, iż wzory zaproponowane przez Zahreddine zawierają błędy, które mają istotny wpływ na rezultaty otrzy-

mywane w wyniku ich zastosowania. Na rysunku 1 przedstawiono algorytm określający współczynnik oporu miejscowego, jednocześnie wskazując miejsca, w których występują błędy. Warto zaznaczyć, że w celu ujednoczenia oznaczeń wzorów, przeprowadzono unifikację, co skutkuje nieznacznymi różnicami w opisach wzorów w porównaniu z pierwotnymi.

Duża liczba przedstawionych formuł stosowanych do wyznaczania współczynnika oporu liniowego znajduje odzwierciedlenie w obszernej literaturze naukowej, która prezentuje jeszcze szerszy zestaw wzorów, w tym znane równania Blassiusa, Waldena oraz Prandtla-Nikuradsego, które są niezaprzeczalnie wartościowe dla określonych przedziałów parametrów (współczynnika chropowatości bezwzględnej, geometrii i liczby Reynoldsa).

Metodyka analizy

W niniejszym opracowaniu przewiduje się analizę korelacji wyników otrzymanych z zastosowaniem równań (7)-(52) w odniesieniu do bazowego równania Colebrooka-White'a (2). W celu oceny efektywności korelacji, posłużono się następującymi wskaźnikami, które określają różnice w rezultatach pomiędzy danym modelem a różniczeniem Colebrooka-White'a:

• Błąd średni σ_s :

$$d_1 = \frac{c_3}{3c_1} - \frac{c_2^2}{9c_1^2} \quad (53)$$

• Błąd względny σ_w :

$$\sigma_w = \left| \frac{\lambda_i - \lambda_{C-W,i}}{\lambda_{C-W,i}} \right| \cdot 100\% \quad (54)$$

- Maksymalny błąd względny $\sigma_{max,w}$:

$$\sigma_{max,w} = \max \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{C-W,i}}{\lambda_{C-W,i}} \right) \cdot 100\% \quad (55)$$

gdzie:

N – ilość wszystkich kombinacji chropowatości względnej i liczby Reynoldsa Re,

λ_i – współczynnik oporów liniowych wyznaczony dla i-tej kombinacji i Re ze wzoru (7)-(44),

$\lambda_{C-W,i}$ – współczynnik oporów liniowych wyznaczony dla i-tej kombinacji i Re ze wzoru Colebrooka-White'a.

Analizę wykonano przy następujących założeniach:

- Zakres zmienności parametrów i Re ograniczono do odpowiadającym ich zmienności w wykresie Moody'ego;
- Liczba Reynoldsa zmienia się w zakresie od 2300 do ok 10⁸. Przyjęto za zasadę, że kolejna liczba Reynoldsa będzie 10 % większa od poprzedniej. Dało to 113 różnych wartości.
- Chropowatość względna zmienia się w zakresie od 5·10⁻² do 10⁻⁵. Wartości chropowatości zmieniają się w myśl podobnej zasady jak w przypadku liczby Reynoldsa, tj. kolejna chropowatość stanowi 110 % chropowatości poprzedniej, co daje 80 przypadków. Przyjęcie zasady o 10% wzrostach pozwala na bardziej równomierne rozłożenie punktów pomiarowych, co sprzyja dokładniejszej reprezentacji zmienności tych parametrów w całym zakresie.

Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla ponad 9 tysięcy kombinacji dla każdej formuły, które umożliwiły ocenę dokładności poszczególnych modeli. W Tabeli 2 przedstawiono wyniki porównawcze różnych modeli względem modelu Colebrooka-White'a. Przeprowadzono analizę częstotliwości występowania błędów względnych w przyjętych przedziałach dokładności.

Analiza

Analizując częstotliwości błędów w różnych przedziałach procentowych, można zidentyfikować 16 modeli, które, z dokładnością do 1%, są odpowiednie do praktycznego zastosowania – przy czym 1% stanowi subiektywną granicę autora. Do tej grupy należą modele: Chen, Barr, Zigrang i Sylvester, Serghides, Sonnad i Goudar, Buzzeli, Vatankhah i Kouchakzadeh, Evangelides, Fang, Mikata

Tabela 2. Porównanie odchyleń poszczególnych modeli względem wzoru Colebrooka-White'a
Table 2. The comparison of deviations of models relative to the Colebrook-White

Nazwa	Błąd średni [-]	Max błąd względny [%]	Częstotliwość względnych błędów w przedziale: [%]											
			od 0.00 % do 0.01 %	od 0.01 % do 0.05 %	od 0.05 % do 0.1 %	od 0.1 % do 0.5 %	od 0.5 % do 1 %	od 1 % do 5 %	od 5 % do 10 %	od 10 % do 20 %	od 20 % do 50 %	od 50 % do 75 %	powyżej 75 %	
1. Moody:	8.5 E-03	5.7 E+01	0.1	0.5	0.5	4.6	3.3	9.2	10	15	49	7.9		
2. Altszul:	2.6 E-03	2.7 E+01	0.3	0.6	0.8	10	8.6	37	16	20	7.1			
3. Wood:	7.9 E-04	9.3 E+00	0.1	0.8	0.9	7.1	7.5	73	11					
4. Eck:	5.5 E-04	1.1 E+01	17	10	5.2	16	9.1	31	11	0.7				
5. Churchill_1:	2.3 E-04	4.6 E+00	5.8	11	7.6	36	22	18						
6. Jain:	2.1 E-04	4.4 E+00	3.7	16	8.0	34	22	16						
7. Swamee	3.7 E-04	4.9 E+00	5.0	22	16	15	6.4	36						
8. Churchill_2:	5.8 E-04	6.2 E+01	0.3	7.3	14	38	23	15	0.7	0.3	1.9	0.1		
9. Chen:	3.7 E-05	5.3 E-01	0.7	32	15	52	0.3							
10. Round:	9.2 E-04	1.0 E+01	0.1	0.6	1.5	8.8	12	50	27	0.2				
11. Shacham:	5.0 E-03	1.0 E+02	6.8	7.7	4.2	12	6.1	16	7.9	9.3	17	11	1.4	
12. Barr:	3.3 E-05	8.0 E-01	14	41	26	16	3.0							
13. Pavlov i inni:	1.2 E-02	9.2 E+01	0.0	0.3	0.3	2.4	3.1	16	7.5	10	26	22	12	
14. Zigrang i Sylvester:	2.3 E-05	1.6 E-01	4.6	28	52	16								
15. Haaland:	1.5 E-04	2.5 E+00	0.8	3.5	4.6	56	17	19						
16. Serghides:	1.8 E-05	1.3 E-01	22	28	39	11								
17. Tsai:	3.7 E-03	3.5 E+01	0.2	1.0	0.9	10	14	30	14	16	14			
18. Manadilli:	1.7 E-04	3.4 E+00	1.0	5.3	8.9	48	23	14						
19. Romeo, Royo i Monzon	8.2 E-04	9.8 E+00	3.9	23	4.9	12	6.2	18	31					
20. Sonnad i Goudar:	3.3 E-05	3.8 E-01	4.8	23	36	36								
21. Rao i Kumar:	4.9 E-03	8.2 E+01	2.1	10	9.0	9.9	5.8	16	7.8	9.3	17	11	1.5	
22. Swamee i Swamee:	5.5 E-04	4.8 E+01	0.3	2.2	16	41	25	11	0.9	0.9	1.8			
23. Buzzeli:	2.2 E-05	1.4 E-01		40	47	13								
24. Vatankhah i Kouchakzadeh:	2.1 E-05	1.3 E-01	3.3	40	43	14								
25. Cheng:	2.0 E-03	6.1 E+01	1.4	6.4	11	13	6.4	26	14	16	6.4	0.2		
26. Avcii i Kargoz:	3.6 E-04	3.3 E+00	0.5	2.3	2.7	25	21.3	48						
27. Evangelides i inni:	6.5 E-05	7.0 E-01	3.0	12	15	63	6.8							
28. Brkić:	2.0 E-04	3.6 E+00	5.8	9.8	5.9	29	32	18						
29. Fang:	5.3 E-05	6.6 E-01	1.6	6.7	13	79	0.4							
30. Ghanbari i inni:	2.4 E-04	2.8 E+00	0.6	1.5	2.4	26	48	22						
31. Li:	1.6 E-04	3.3 E+00	6.0	14	11	37	19	13						

Tabela 2. c.d.
Table 2.

32. Samadianfard:	3.8 E-04	7.1 E+00	0.4	2.8	3.7	24	22	43	3.7				
33. Winning i Cole:	6.2 E-05	1.9 E+00	1.6	6.9	9.1	79	1.9	1.1					
34. Heydari i inni:	1.1 E-04	1.1 E+00	1.2	5.0	6.5	47	40	0.7					
35. Mikata i Walczak:	3.3 E-05	3.7 E-01		21	47	32							
36. Shaikh i Brkić:	1.2 E-03	4.3 E+01		1.6	34	25	5.1	14	7.8	8.0	4.8		
37. Bilberg:	1.7 E-05	1.2 E-01	26	28	38	8.3							
38. Ofor i Alabi:	4.5 E-06	2.0 E-01	66	27	5.8	1.8							
39. Brkić i Praks:	1.1 E-06	2.8 E-02	98	2									
40. Bellos i inni:	5.3 E-03	6.1 E+01	0.2	1.4	1.8	13.6	15.6	34	14.7	13.4	5.5	0.2	
41. Vatankhah:	1.6 E-05	2.6 E-01	56	12	11	21							
42. Niazkar:	1.8 E-05	1.3 E-01	21	28	39	11							
43. Mileikovskiy i Tkachenko:	1.2 E-07	7.5 E-04	100										
44. Zahreddine:	1.8 E-05	1.3 E-01	21	28	39	11							

i Walczak, Bilberg, Ofor i Alabi, Vatankhah, Niazkar, Mileikovskiy i Tkachenko, Zahreddine.

Spośród przedstawionych metod najlepsze dopasowanie obserwujemy w przypadku modelu Mileikovskiy i Tkachenko, gdzie uzyskano błąd względny mniejszy niż 0.01% przy wszystkich analizowanych kombinacjach liczby Reynoldsa i chropowatości względnej. Średnia różnica między tym modelem a modelem Colebrooka-White'a wynosi ok. 0.000000116, zaś maksymalny błąd względy określony został na poziomie 0.00075 – taki błąd otrzymano dla skrajnego przypadku $Re = 2300$, $k/D = 10^{-5}$.

Niemniej jednak, czy to jednoznacznie świadczy o tym, że jest to najlepszy model spośród wszystkich tu przedstawionych, z perspektywy praktycznego zastosowania? Doskonale dopasowanie osiągamy również przy użyciu równania Brkić'a, dla którego aż 98% błędów względnych było mniejszych niż 0.01%.

Odpowiedź na to pytanie, który z przedstawionych modeli jest lepszy, nie jest jednoznaczna, podobnie jak niejednoznaczna jest np. rzeczywista chropowatość względna przewodu, którą producenci armatury i rur podają w swoich katalogach. Na przykład, w katalogach [53, 54], producenci podają chropowatość bezwzględną dla rur warstwowych na poziomie 0.004 i 0.007 mm. Tak podana wartość oznacza, że w przypadku pierwszego producenta rzeczywista chropowatość znajduje się w przedziale od

0.00351 do 0.00450 mm, co stanowi prawie 25% wartości deklarowanej.

Tak naprawdę, na etapie projektowania, nie jesteśmy w stanie określić rzeczywistej wartości współczynnika lambda. Czy jest sens go dokładnie liczyć czy nie wystarczy wartość określona z pewną dokładnością, zwłaszcza że charakterystyka hydrauliczna rurociągu (współczynnik lambda) może się w czasie eksploatacji zmieniać?

Nieprecyzyjna jest również wydajność pomp przedstawiana przez ich producentów. Na przykład, wydajność pomp obiegowych marki Grundfos [55] do cyrkulacji ciepłej wody jest podawana z dokładnością do 1%, a jak wiadomo, charakterystyka pomp również zmienia się w trakcie eksploatacji (zmniejsza się wysokość podnoszenia pompy). Z powyższego wynika, że z punktu widzenia projektowania, problemem nie powinien być wybór odpowiedniego wzoru do obliczenia wartości lambda, a przyjęcie danych wejściowych odpowiadających warunkom rzeczywistym.

Czynnikiem decydującym o efektywności praktycznego zastosowania danego wzoru jest stopień jego złożoności. W potocznym rozumieniu, im wzór jest prostszy, tym lepszy. Niestety, autorowi brakuje informacji na temat kryteriów, które uwzględniałyby ocenę jakości nie tylko w kontekście liczby używanych parametrów i dokładności modelu, ale także złożoności modelu pod względem ilości operacji matematycznych. Częściowo

problem ten rozwiązuje się poprzez porównanie wydajności obliczeniowej, mierząc czas wykonania określonej funkcji [56]. Niemniej jednak, jest to zagadnienie wymagające dalszych, bardziej szczegółowych rozważań i analiz.

Największe różnice zaobserwowano w przypadku wzorów Schahama (18) oraz Pavlova (20), gdzie odchyłki pomiędzy wartościami określonymi z ich wzorów a zależnością Colebrooka-White'a sięgają ponad 75%. Należy jednak wyrazić zastrzeżenie co do tego, czy przedstawione formuły są zgodne z oryginalnymi. Niestety, autorowi nie udało się uzyskać dostępu do oryginalnych manuskryptów tych autorów, a same formuły zostały pobrane z publikacji Olivaresa [10], dlatego można jedynie stwierdzić nieprzydatność modeli tych autorów jedynie w postaci przedstawionej w tej pracy.

Po odrzuceniu tych modeli, wzorem, który najmniej precyzyjnie odzwierciedla równanie Colebrooka-White'a, okazał się wzór Moody'ego. Jest to wynik przewidywalny, zważywszy na fakt, że jest to najstarszy wzór spośród przedstawionych w tej pracy. Duże niedopasowanie zaobserwowano również w przypadku modelu Rao i Kumara (28), gdzie w prawie 50% przypadków błędy względne były większe niż 5%.

Wnioski

Celem pracy był przegląd formuł określających wartość współczynnika strat liniowych. Udało się przeanalizować 44 modele i odnieść je przy zastosowaniu prostych ocen statystycznych (dla wykonanych 9 tysięcy kombinacji liczby Reynoldsa i chropowatości względnej dla każdej formuły) do równania Colebrooka-White'a, który uznany został za wyznacznik dokładności. Analiza porównawcza wykazała dla wielu jawnych formuł bardzo dużą dokładność. W przypadku równania Mileikovskiy i Tkachenko wykazano, że dla wszystkich kombinacji Re błąd względny nie przekroczył 0.01%. 12 modeli wykazało błędy nie większe niż 0.5 %. 28 modeli daje błędy mniejsze niż 5 %. Pozostałe modele, mimo, że w wielu przypadkach również posiadają bardzo dobre przybliżenie względem równania Colebrooka-White'a, nie nadają się do praktycznego stosowania w całym zakresie liczb Reynoldsa i chropowatości względnej. W pracy zabrakło kryterium oceny równań, które by podkreślało stopień skomplikowania poszczególnych równań. W ramach dalszych badań i analiz powinno się skupić na upraszczaniu równań zachowując przy tym już określone

dokładności. Z punktu widzenia projektanta, obecne formuły są wystarczające i dalsze badania są już niepotrzebne. Coraz to dokładniejsze formuły nie wnoszą wiele w procesie optymalizacji instalacji. Poważnym tematem do międzynarodowej dyskusji powinno być odrzucenie doktryny, że to wzór Colebrooka-White'a w ogólnie znanej postaci jest tym najważniejszym. W związku z powyższym, kontynuacja badań powinna skoncentrować się nie tylko na identyfikacji nowych wzorów dla współczynnika oporów liniowych, lecz także na badaniach mających na celu opracowanie nowych formuł dla strat ciśnienia na długości przewodu. Takie podejście powinno być priorytetem, umożliwiając lepsze zrozumienie i bardziej precyzyjne modelowanie strat hydraulicznych w zróżnicowanych warunkach przepływu.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] Gupta R., Bhawe P.R.; "Fuzzy parameters in pipe network analysis". *Civil Eng Environ Syst*. Vol. 24, Number 1, pp 33–54, 2007
- [2] Lukman S., Oke I. A.; "Accurate solutions of Colebrook – White's friction factor formulae", *Nigerian Journal of Technology*, Vol. 36, No. 4, 2017,
- [3] Gajdos T., Hayashi T.; Tallon J.M.; Vergnaud J.C.; "Attitude toward imprecise information", *Journal of Economic Theory* Volume 140, Issue 1, 2008
- [4] Altuszul D.; „Gidrawliczeskije potieri na trenje w truboprowodach”, *Gosenergoizdat*, Moskwa 1963
- [5] Clamond D.; "Efficient resolution of the Colebrook equation," *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 48, no. 7, 2009
- [6] Fanning J.T.; "A practical treatise on hydraulic and water-supply engineering", D. Van Nostrand, 1896
- [7] Malesińska A., „Czy wybór wzoru do obliczania λ ma znaczenie?”, *Gaz, Woda i Technika Sanitarna*, Styczeń 2015
- [8] Oke I.A.; "Performance evaluation for Darcy friction factor formulae using Colebrook-White as reference", *Ife Journal of Science* vol. 17, no. 1, 2015
- [9] Moody M.L.; "An approximate formula for pipe friction factors", *Trans. ASME*, p. 1005, 1947
- [10] Olivares A., Guerra R., Alfaro M.; Noite-cuello E.; Puentes L.; "Experimental evaluation of correlations used to calculate friction factor for turbulent flow in cylindrical pipes", *Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing.*, Vol. 35, 2019
- [11] Wood D.J.; "An explicit friction factor relationship", *Civil Engrs. ASCE* 60, 1966
- [12] Eck B.; "Technische Stromungslehre"; Springer, New York, 1973
- [13] Churchill S.W.; "Empirical expressions for the shear stressing turbulent flow in commercial pipe.", *AIChE Journal* 19(2):375– 376, 1973
- [14] Jain A.K.; "Accurate explicit equations for friction factor", *Proc. ASCE, J. Hydraulics Div.*, 102, p. 674, 1976
- [15] Swamee P.K., Jain, A. K.; "Explicit equations for pipe-flow problems", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* 102, HY5, 657-664, 1976
- [16] Churchill, S.W.; "Friction factor equation spans all fluid-flow regimes", *Chem Eng* 84(24):91–92, 1977
- [17] Chen, N.H.; "An explicit equation for friction factor in pipe", *Ind Eng Chem Fundam* 18(3):296 – 304,
- [18] Round G.F.; "An explicit approximation for the friction-factor Reynolds number relation for rough and smooth pipes", *Can. J. Chem. Eng.*, 58 (1), p. 122, 1980
- [19] Barr D.I.H.; "Solutions of the Colebrook–White function for resistance to uniform turbulent flow", *Proc. Inst. Civil Engrs., Part 2*, 71, p. 529, 1981
- [20] Zigrang D.J.; Sylvester N.D.; "Explicit approximations to the Colebrook's friction factor" *AIChE J.*, 28 (3), p. 514, 1982
- [21] Haaland S.E.; "Simple and explicit formulas for the friction-factor in turbulent pipe flow", *Trans. ASME, JFE*, 105, p. 89, 1983
- [22] Serghides, T. K. 1984. Estimate friction factor accurately. *Chem Eng*. 91:63– 64.
- [23] Tsal R. J.; "Altshul-Tsal friction factor equation, Heating, Piping and Air Conditioning", *ASCE* 102: 657-664, 1989
- [24] Manadilli G.; "Replace implicit equations with signomial functions" *Chem. Eng.*, 104 (8), p. 129, 1989
- [25] Romeo, E., Royo, C., Monzon, A.; "Improved explicit equation for estimation of the friction factor in rough and smooth pipes", *Chemical Engineering Journal* 86 (3): 369-374, 2002
- [26] Sonnad, J. R., Goudar, C. T.; "Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation", *J. Hydraul Eng.* ASCE 132(8):863–867, 2006
- [27] Rao A.R., Kumar B.; "Friction factor for turbulent pipe flow", *Division of Mechanical Science, Civil Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, India*, 2007
- [28] Rao A.R., Kumar B.; "Transition of turbulent pipe flow", *J. Hydraul. Res. IAHR*, 47 (4), pp. 529-533, 2009
- [29] Swamee P.K., Swamee N.; "Full-range pipe-flow equations", *Journal of Hydraulic Research* 45:841-843, 2007
- [30] Buzzelli D.; "Calculating friction in one step", *Mach. Des.*, 80 (12), pp. 54-55, 2008
- [31] Vatankhah, A. R., Kouchakzadeh, S., Discussion of "Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation", *Hydraul. Eng. ASCE* 134 (8): 1187 – 11942, 2008
- [32] Cheng, N.S.; "Formulas for Friction Factor in Transitional Regimes". *Journal of Hydraulic Engineering*. 134 (9): 1357–1362, 2008
- [33] Avci, A., Karagoz, I.; "A novel explicit equation for friction factor in smooth and rough pipes", *J. Fluids Eng.* 131(6): 61203, 1-4, 2009
- [34] Evangelides, C.; Papaevangelou, G., Tzimopoulos, C. A New Explicit Relation for the Friction Factor Coefficient in the Darcy–Weisbach Equation. *PREC*, New Jersey, 2010
- [35] Brkić D.; "Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction", *Journal of Petroleum Science and Engineering* 77 (1), 34–48, 2011
- [36] Fang X., Xu Y., Zhou Z.; "New correlations of single-phase friction factor for turbulent pipe flow and evaluation of existing single-phase friction factor correlations", *Nuclear Engineering and Design* 241 (3), 897–902, 2011
- [37] Ghanbari A., Farshad F.F., Rieke H.H.; "Newly developed friction factor correlation for pipe flow and flow assurance", *J. Chem. Eng. Mater. Sci.* 2 (6), 83–86, 2011
- [38] Li P., Seem J.E., Li Y.; "A new explicit equation for accurate friction factor calculation of smooth pipes", *Int. J. Refrig.*, 34(6):1535–1541, 2011
- [39] Samadianfar S.; "Gene expression programming analysis of implicit Colebrook–White equation in turbulent flow friction factor calculation", *JPSE* 92–93, 48–55, 2012
- [40] Winning H. K., Coole T.; "Improved method of determining friction factor in pipes". *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 25 (4), 941–949, 2015
- [41] Heydari A., Narimani E., Pakniya F.; "Explicit determinations of the Colebrook equation for the flow friction factor by statistical analysis", *Chem. Eng. & Tech.* 38 (8), 1387–1396., 2015
- [42] Mikata, Y., Walczak, W. S. "Exact analytical solutions of the Colebrook-White equation." *Journal of Hydraulics Engineering*, 2015
- [43] Brkić D. "A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 93, 513–515, 2016
- [44] Biberger D.; "Fast and accurate approximations for the Colebrook equation", *Journal of Fluids Engineering* 139 (3), 031401, 2016
- [45] Offor U.H., Alabi S.B.; "An accurate and computationally efficient explicit friction factor model", *Advances in Chemical Engineering and Science* 06 (03), 237–245, 2016
- [46] Brkić D., Praks P.; "Accurate and efficient explicit approximations of the Colebrook flow friction equation based on the Wright ω -function". *Mathematics* 7 (1), 34, 2018
- [47] Bellos V., Nalbantis I.; Tsakiris G.; "Friction Modeling of Flood Flow Simulations", *Journal of Hydraulic Engineering*, 2018
- [48] Bellos V., Nalbantis I.; Tsakiris G.; "Erratum for "Friction Modeling of Flood Flow Simulations" ". *Journal of Hydraulic Engineering*, 2020
- [49] Vatankhah A.R.; "Approximate analytical solutions for the Colebrook equation", *Journal of Hydraulic Engineering* 144 (5), 2018
- [50] Niazkar M.; "Revisiting the Estimation of Colebrook Friction Factor: A Comparison between Artificial Intelligence Models and C-W based Explicit Equations". *KSCE Journal of Civil Eng.*, 2019
- [51] Mileikovskiy V., Tkachenko T.; "Precise Explicit Approximations of the Colebrook-White Equation for Engineering Systems". *Proceedings of EcoComfort*, 2020.
- [52] Zahreddine H.; "Accurate explicit analytical solution for Colebrook-White equation", *Mechanics Research Communications*, Volume 111, 2021,
- [53] KATALOG TECHNICZNY Instalacje do ciepłej i zimnej wody użytkowej Radopress oraz ogrzewania podłogowego Floortherm firmy Pipelife.
- [54] SYSTEM KAN-therm, Poradnik PROJEKTANTA I WYKONAWCY firmy KAN-therm
- [55] <https://product-selection.grundfos.com/pl/products/alpha/alpha1-n/alpha1-20-60-n-150-99452182?pumpsystemid=2281976169&tab=variant-sizing-results>, dostęp 20.02.2024
- [56] Areeerachakul N., Girdwichai L., Areeerakul N.; "Discussion of "Accurate explicit analytical solution for Colebrook-White equation" by Zahreddine H.", *MRC*, Volume 117, 2021,